定理：行列式性质

1) 交换 A 两行得矩阵 B，则 $\det(B) = -\det(A)$

2) A 的某行乘 λ 得矩阵 B，则 $\det(B) = \lambda \det(A)$

3) A 的某行是两向量之和，则 $\det(A)$ 可拆成两行列式之和。

4) A 的两行成比例，则 $\det(A)=0$

5) 将 A 的一行加上另一行的 λ 倍得 B，则 $\det(B)=\det(A)$

证：(1) $\det A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{p+q+i+j-1} (a_{pi}a_{qj} - a_{pj}a_{qi}) D_{ij}^{pq}$

性质总结：$A=(a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 　det 看成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的函数

(1) 反对称性　$\det(\cdots \alpha_i, \cdots \alpha_j \cdots) = -\det(\cdots \alpha_j, \cdots \alpha_i \cdots)$

(2) 多重线性　$\det(\cdots \lambda\alpha_i + \mu\beta_i, \cdots) = \lambda\det(\cdots,\alpha_i,\cdots) + \mu\det(\cdots,\beta_i,\cdots)$

(3) 规范性　$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) = 1$

(4) det 由 (1),(2),(3) 唯一确定.

例　$\det(\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha) = 2\det(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\det(A) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\vec{e_j},\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\vec{e_j},\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\vec{e_j}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj}\ \det(\vec{e_{j_1}},\vec{e_{j_2}},\cdots,\vec{e_{j_n}})$$

$j_l = j_{l'}\ (l \neq l')$
$\Downarrow$
$\det(\vec{e_{j_1}},\cdots\vec{e_{j_n}}) = 0 \Rightarrow$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)\in S_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\ \underset{??}{\underline{\det(\vec{e_{j_1}},\vec{e_{j_2}},\cdots,\vec{e_{j_n}})}}$$

其中 S_n 为 $1\,2\cdots n$ 的所有排列组成的集合.

定义： 由 n 个两两不同的正整数组成的有序数组 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 称为一个 n 元排列 (permutation).

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的排列总数为 $n!$

标准排列 $(1,2,\cdots,n)$

$p<q$ & $j_p > j_q \Rightarrow (j_p, j_q)$ 为 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 的一个逆序

例：$(1\,4\,3\,2)$ 的逆序有 $(4\,3),(4\,2),(3\,2)$.

$(j_1\cdots j_n)$的逆序总数记为 $\tau(j_1,\cdots j_n)$.

例 $\tau(1432) = 3$.

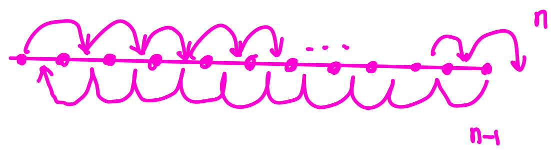
$$(j_1\cdots j_n)\begin{cases}\text{奇排序} & 2\nmid \tau(j_1\cdots j_n)\\ \text{偶排序} & 2\mid \tau(j_1\cdots j_n)\end{cases}$$

定义： 将一个排列中的两个元素互换位置，其余元素位置不变，这个过程称为一次**对换**

定理： 1) 对换改变奇偶性.

2) $(j_1 \cdots j_n)$ 可经过 $\tau(j_1, \cdots j_n)$ 次相邻位置的对换变成标准排列.

证：1)



2n-1 次

2). $j = (j_1 \; \cdots \; j_i \; \cdots \; j_n)$, $j_i = n$ $\xrightarrow{n-i \text{ 次}}$ $j' = (\underbrace{j_1 \cdots j_{i-1} \, j_{i+1} \cdots j_n}_{j'} \; j_i)$, $j_i = n$

$\downarrow \; \tau(j')$ 次

$(1, 2, \cdots, n)$

$\tau(j) = \tau(j') + (n-i) \Rightarrow \checkmark$ □

定理： 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵.

$$\det(A) = \sum_{(j_1 \cdots j_n) \in S_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Pf: $\det(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \cdots, \vec{e}_{j_n}) = (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)}$ □

例：1) $S_2=\{(12),(21)\}$ $\quad \tau(12)=0 \quad \tau(21)=1$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

2) $S_3=\{(123),(231),(312),(321),(213),(132)\}$

$$\begin{array}{c|cccccc} \tau\downarrow & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

3) $$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,2,1)} a_1a_2\cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

例：$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix}$$ （A_{ii} 为方阵）

$$\Rightarrow \det(A)=\det(A_{11})\cdots\det(A_{kk}).$$

证：$k=2$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1\,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r\,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1\,r+1} & \cdots & a_{r+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & - & - & - \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n\,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\sum_{j=(j_1\cdots j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}a_{r+1\,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{\substack{j\in S_n \\ r<j_{r+1},\cdots,j_n\leq n}}(-1)^{\tau(j)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}a_{r+1\,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{\substack{\{j_1\cdots j_r\}=\{1,\cdots,r\} \\ \{j_{r+1}\cdots j_n\}=\{r+1,\cdots,n\}}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)+\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}a_{r+1\,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\left(\sum_{1\leq j_1,\cdots j_r\leq r}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}\right)\left(\sum_{r<j_{r+1},\cdots,j_n\leq n}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}a_{r+1\,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}\right)$$

$$=\det(A_{11})\cdot\det(A_{22})$$

$k\geq 3$ 时：

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & A_{kk} \end{pmatrix}=\det(A_{11})\cdot\det\begin{pmatrix} A_{22} & & * \\ & \ddots & \\ & & A_{kk} \end{pmatrix}=\det(A_{11})\cdots\det(A_{kk})$$